



НАЗВА КУРСУ

Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>					
Галузь знань	<i>F Інформаційні технології</i>					
Спеціальність	<i>F3 Комп'ютерні науки</i>					
Освітня програма	<i>Технології візуальних обчислень</i>					
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>					
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>					
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, весняний семестр</i>					
Обсяг дисципліни	<i>150/ 5 кредитів</i>					
		Лекції	Практич. занят. (семінари)	Лабор. заняття (комп'ют. практ.)	Індив. заняття	CPC
	Години	30	30	0	0	90
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен	Залік	МКР (вказати кількість)	РР (вказати кількість)	ДКР (вказати кількість)	Реферат (вказати кількість)
	+	-	1	1	0	0
Розклад занять	http://rozklad.kpi.ua					
Мова викладання	Українська					
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: Єрьоміна Тетяна Олександрівна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, к.ф.-м.н. ierominat@ukr.net, https://intellect.kpi.ua/profile/eto3, https://intellect.kpi.ua/profile/eto3/publications ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5765-9875 Практичні: Єрьоміна Тетяна Олександрівна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, к.ф.-м.н. ierominat@ukr.net, https://intellect.kpi.ua/profile/eto3, https://intellect.kpi.ua/profile/eto3/publications ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5765-9875					
Розміщення курсу	Сайт кафедри, Google classroom, https://ecampus.kpi.ua/home .					

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

- Навчальна дисципліна належить до циклу **математичної та природничо-наукової підготовки**.
- Предмет навчальної дисципліни - методи диференціального і інтегрального числення та їх застосування до розв'язування абстрактних та прикладних задач.

Міждисциплінарні зв'язки: Загальний курс вищої математики є фундаментом освіти спеціаліста-інженера. Теми, які розглядаються в курсі “ Математичний аналіз 1. Лінійна алгебра. Диференціальне числення ”, а також кількість годин, що плануються для викладання кожної з цих тем, нерозривно зв'язані з вимогами спеціальних та інших загальноосвітніх кафедр, що стосується специфіки їх дисциплін.

Багато уваги приділено диференціальному та інтегральному численням, без яких неможливо вивчати у вищому навчальному закладі такі дисципліни як фізика, теоретична механіка, нарисна геометрія та ін. Цей курс є базовим курсом для успішного оволодіння студентами спеціальних дисциплін.

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей використовувати методи математичного аналізу для оволодіння необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням, де це можливо, обчислювальної техніки.

Програмні компетентності

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

ЗК 6 Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями

ЗК 11 Здатність приймати обґрунтовані рішення

Фахові компетентності (ФК)

ФК 1 Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтовування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування

Програмні результати навчання (ПР)

ПР 2 Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна базується на дисципліні Математичний аналіз 1, Лінійна алгебра, Диференціальне числення, що викладається в першому семестрі та на базі повної середньої або середньої професійної освіти.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної

3.1. Невизначений інтеграл

Первісна функція. Невизначений інтеграл, його властивості. Інтегрування за допомогою заміни змінної в невизначеному інтегралі. Таблиця інтегралів. Інтегрування частинами. Деякі рекурентні формули. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування біноміальних диференціалів. Теорема Чебишева. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції. Інтегрування виразів із квадратними тричленами. Приклади елементарних функцій, первісні яких не є елементарними функціями.

3.2. Визначений інтеграл

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла. Достатні умови інтегрування функції. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про оцінку визначеного інтеграла та її геометричне тлумачення.

Визначений інтеграл як функція змінної верхньої межі інтегрування. Неперервність цієї функції, її диференційовність. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Інтегрування цілих додатних степенів синуса і косинуса.

Обчислення площ фігур у декартовій системі координат. Площа фігури в полярній системі координат. Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перерізів. Об'єм тіла обертання. Спрямленість плоскої кривої. Довжина дуги плоскої кривої при різних способах її задання. Довжина дуги просторової кривої. Еліптичні інтеграли. Обчислення площі поверхні обертання. Статичні моменти та координати центру мас матеріальної дуги та матеріальної плоскої фігури. Теореми Паппа-Гульдіна. Моменти інерції. Методи чисельного інтегрування: формули прямокутників, трапецій та парабол.

3.3. Невласні інтеграли; інтеграли, залежні від параметрів

Невласні інтеграли від обмежених функцій по необмеженому проміжку інтегрування. Головне значення. Достатні ознаки збіжності та розбіжності невластних інтегралів від додатних функцій. Абсолютна збіжність.

Невласні інтеграли від необмежених функцій по обмеженому проміжку інтегрування. Головне значення. Достатні ознаки збіжності та розбіжності невластних інтегралів від додатних функцій. Абсолютна збіжність.

Інтеграли, залежні від параметрів. Неперервність. Диференціювання та інтегрування за параметром. Невласні інтеграли, які залежать від параметрів. Гама- та бета-функції.

Розділ 4. Функції кількох змінних

4.1. Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних

Основні поняття: визначення евклідової відстані між двома точками в багатовимірному просторі; окіл; внутрішня, межова, зовнішня точки множини; відкрита та замкнена множина; область. Поняття функції кількох змінних. Неперервність в точці, в області, в замкненій області. Теореми Коші і Вейерштрасса про неперервні функції. Рівномірна неперервність, теорема Кантора. Функція двох змінних, її область визначення. Геометричне тлумачення функції двох змінних.

Частинні похідні першого порядку: означення, геометричне тлумачення для функції двох змінних. Диференційовність функції кількох змінних в точці: означення, необхідна умова, достатня умова. Повний диференціал та його використання у наближених обчисленнях. Похідна складеної функції. Повна похідна. Дотична площина та нормаль до поверхні.

Геометричне тлумачення повного диференціала функції двох змінних. Неявна функція. Теорема про існування неявної функції. Теорема про диференціювання неявної функції. Похідні вищих порядків. Теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків.

Формула Тейлора для функції двох змінних. Поняття про особливі точки кривої. Екстремум функції кількох змінних. Необхідні умови екстремуму функції кількох змінних. Достатні умови. Найбільше та найменше значення функції, неперервної в обмеженій замкненій області. Метод функції Лагранжа.

Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння

5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Особливі розв'язки. Поле напрямків. Ізоклини. Метод послідовних наближень.

Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння однорідні відносно змінних та які зводяться до них. Рівняння в повних диференціалах.

5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку. Деякі види диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння довільного порядку. Лінійні диференціальні оператори, їх властивості. Теорема про необхідну і достатню умову лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку з неперервними в деякому інтервалі коефіцієнтами. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку з неперервними коефіцієнтами. Формула Остроградського-Ліувілля. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з неперервними на деякому інтервалі коефіцієнтами за відомим нетривіальним розв'язком. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння довільного порядку.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Знаходження загального розв'язку в усіх випадках. Метод варіації довільних сталих розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

Принцип накладання для лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Системи диференціальних рівнянь. Нормальна система. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний і частинний розв'язки, загальний і частинний інтеграли. Розв'язування нормальної системи методом виключення. Нормальні системи лінійних диференціальних рівнянь. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Структура загального розв'язку. Лінійні однорідні системи. Загальний розв'язок. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами і їх розв'язок у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

5.4. Елементи теорії стійкості

Поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь. Означення стійкості та асимптотичної стійкості за Ляпуновим. Стійкість нульового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Критерій Рауса-Гурвіца. Функції Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Основна література :

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник-К.: А.С.К., 1993, 2001.
2. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник. За редакцією В.П. Дубовика, І.І. Юрика. - К., А.С.К. 2001.
3. Дудкін, М. Є. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1

файл: 10,96 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с.
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064>

4. Збірник Збірник завдань з вищої математики. Частина 2. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. - К., Політехніка, 2003.
5. Вища математика. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 8,04 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 409 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/47504>

Додаткова література

6. Розв'язання в полярній системі координат геометричних задач за допомогою визначеного інтеграла [Електронний ресурс] : методичний посібник до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів усіх спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Г. К. Новикова, Є. В. Массалітіна. – Електронні текстові дані (1 файл 3,62 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 70 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27858>
7. Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики. Збірник завдань [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. Л. Гречко, М. Є. Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 8,26 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021 – 280 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41212>

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

5.1. Дидактичні матеріали:

На лекційних заняттях подається теоретичний матеріал, наводяться приклади розв'язування основних тематичних задач. Кожна лекція у вигляді PDF-файлу та відео файлів розміщується в GooleClass, для легкого доступу кожному студенту до лекційного матеріалу. Для покращення засвоєння матеріалу (тобто мотивації студента працювати підчас лекції) проводяться тести на основні поняття, щойно пройденого матеріалу. На практичних заняттях студенти закріплюють теоретичний та опрацьовують практичний матеріал, розв'язуючи задачі. Для самостійної роботи та кращого засвоєння матеріалу студентам задаються домашні завдання, індивідуальні та самостійні роботи, розрахункова робота. Перевірка рівня знань та засвоєння матеріалу проводиться за допомогою різноманітних контрольних заходів: тематичні контрольні роботи, тести, експрес-контрольні, виконання та захист розрахункової роботи. Оцінювання таких робіт проводиться у відповідності до положення про рейтингову систему оцінювання успішності студентів з даної дисципліни.

Перелік лекцій

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної	
Тема 3.1. Невизначений інтеграл	
1	<u>Лекція № 1</u> 1. Первісна функції. Невизначений інтеграл, означення та властивості. 2. Таблиця інтегралів. 3. Основні методи інтегрування невизначеного інтеграла. Метод безпосереднього інтегрування

2	<u>Лекція № 2</u> 1. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі. 2. Метод інтегрування частинами. 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій: основні відомості про дробово-раціональні функції; дробово-раціональна функція, інтегрування елементарних раціональних дробів.
3	<u>Лекція № 3.</u> 1. Інтегрування тригонометричних функцій. 2. Інтегрування гіперболічних функцій. 3. Інтегрування ірраціональних функцій: добово-раціональна підстановка, інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен, тригонометричні підстановки, інтегрування диференціального бінома.
Тема 3.2. Визначений інтеграл	
4	<u>Лекція № 4</u> 1. Визначений інтеграл. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. 2. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми: достатні умови існування, геометричний зміст, фізичний зміст визначеного інтегралу, властивості визначеного інтегралу.
5	<u>Лекція № 5</u> 1. Визначений інтеграл як функція змінної верхньої межі інтегрування. Теорема Барроу. 2. Формула Ньютона-Лейбніца. 3. Способи обчислення визначеного інтегралу. 4. Обчислення відповідних інтегралів. Виведення для них рекурентних формул. 5. Інтегрування парних і непарних функцій на симетричному відрізку.
6	<u>Лекція 6</u> 1. Обчислення площ плоских фігур. 2. Обчислення об'єму тіла: об'єм тіла за відомими площами паралельних перерізів, об'єм тіла обертання.
7	<u>Лекція № 7</u> 1. Обчислення довжини дуги плоскої кривої. Основні означення. Плоска крива задана рівнянням у явному вигляді, параметричному, в полярній системі координат. 2. Обчислення площі поверхні обертання. Плоска крива задана рівнянням у явному вигляді, параметричному, в полярній системі координат.
Тема 3.3. Невласні інтеграли; інтеграли, залежні від параметрів	
8	<u>Лекція №8</u> 1. Невласні інтеграли від обмежених функцій по необмеженому проміжку (невласні інтеграли 1-го роду). Достатні умови збіжності і розбіжності. Поняття про абсолютну збіжність. 2. Невласні інтеграли від необмежених функцій по обмеженому проміжку (невласні інтеграли 2-го роду). Достатні умови збіжності і розбіжності. Поняття про абсолютну збіжність.
Розділ 4. Функції багатьох змінних	
Тема 4.1. Поняття функції багатьох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних	
9	<u>Лекція № 9. Функції багатьох змінних.</u> 1. Евклідов n -вимірний простір. Основні поняття. Поняття функції кількох змінних 2. Границя і неперервність функції двох змінних. 3. Похідні та диференціал функції кількох змінних. Частинні похідні функції двох змінних. Диференційовність функції в точці. Повний диференціал функції. Застосування повного диференціалу до наближених обчислень. Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантність (незмінність) форми першого диференціала. Диференціювання неявно заданої функції.
10	<u>Лекція №10</u> 1. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. 2. Дотична площина і нормаль до поверхні. 3. Екстремум функції двох змінних.

Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння	
Тема 5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку	
11	Лекція № 11 1. Основні поняття. 2. Диференціальне рівняння 1-го порядку, загальні поняття. Теорема існування та єдності розв'язків. 3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. 4. Однорідні диференціальні рівняння.
12	Лекція № 12 1. Диференціальні рівняння, які зводяться до диференціального рівняння з відокремленими змінними та до однорідного диференціального рівняння. 2. Лінійні диференціальні рівняння: метод Лагранжа (варіації довільної сталої); метод Бернуллі. 3. Диференціальне рівняння Бернуллі.
Тема 5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків	
13	Лекція № 13 1. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття. Теорема існування та єдності розв'язків. 2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку. 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. 4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. 5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -ого порядку.
14-15	Лекція № 14-15 1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2-ого порядку. Теорема про структуру загального розв'язку. 2. Метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої). 3. Інтегрування лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР) 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами. 4. Інтегрування ЛОДР n -го ($n > 2$) порядку зі сталими коефіцієнтами. 5. Інтегрування ЛНДР 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод Лагранжа.
Тема 5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь	
15	Лекція № 15 1. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Нормальна система ДР. Теорема існування та єдності розв'язків задачі Коші. 2. Інтегрування нормальних систем ДР.

Перелік (орієнтовно) практичних занять

№з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичного забезпечення, посилання на літературу та завдання на СРС)
Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної	
Тема 3.1. Невизначений інтеграл	
1	Практика №1 1. Невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів. 2. Метод безпосереднього інтегрування. 3. Метод підстановки (заміни змінної).
2	Практика №2 1. Інтегрування частинами.

	2. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен. 3. Інтегрування раціональних функцій. Розкладення на простіші дробу.
3	Практика №3 1. Розкладення на простіші дробу (корені дійсні та комплексні, різні та кратні). Метод знаходження невизначених коефіцієнтів. 2. Інтегрування раціональних функцій.
4	Практика №4 1. Інтегрування ірраціональних виразів. 2. Інтегрування диференціальних біномів. Теорема Чебишева. 3. Інтегрування тригонометричних функцій: підінтегральна функція непарна відносно синуса, підінтегральна функція непарна відносно косинуса, парна відносно синуса та косинуса одночасно.
5	Практика №5 Інтегрування тригонометричних виразів: універсальна тригонометрична підстановка; заміна $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; інтеграли, що обчислюються за допомогою тригонометричних формул різних варіацій добутків $\sin a$, $\cos b$.
Тема 3.2. Визначений інтеграл	
6	Практика №6 1. Визначений інтеграл. Обчислення визначеного інтегралу: формула Ньютона-Лейбніца; заміна змінної; інтегрування частинами. 2. Застосування визначеного інтегралу. Знаходження площі криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції, заданої: явно, параметрично.
7	Практика №7 1. Знаходження площі криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції. 2. Полярна система координат.
8	Практика №8 1. Знаходження довжини дуги за допомогою визначеного інтегралу. 2. Знаходження об'єму тіла за допомогою визначеного інтеграла: за допомогою площі паралельних перерізів, фігури обертання навколо осей Ox та Oy (функція задана явно та параметрично).
Тема 3.3. Невласні інтеграли та інтеграли, залежні від параметрів	
9	Практика №9 1. Невласний інтеграл 1-го роду (означення, властивості, ознаки збіжності): обчислення, дослідження на збіжність. 2. Невласний інтеграл 2-го роду (означення, властивості, ознаки збіжності): обчислення, дослідження на збіжність.
Розділ 4. Функції кількох змінних	
Тема 4.1. Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних	
10	Практика №10. Диференціальне числення ФБЗ. Частинні похідні 1-го порядку. Диференціал першого порядку. Частинні похідні вищих порядків. Мішані похідні. Диференціали вищих порядків. Похідні складеної функції. Похідні неявно заданих функцій. Дотична площина та нормально до поверхні.
Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння	
Тема 5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку	
11	Практика №11. Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння 1-го порядку. 1. ДР з відокремлюваними змінними. 2. Загальний, частинний та особливий розв'язки ДР. Задача Коші. 3. Однорідні ДР 1-го порядку.
12	Практика №12. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. 1. Метод Бернуллі. 2. Метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої).

Тема 5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків	
13	<u>Практика №13</u> Диференціальні рівняння вищих порядків. 1. Диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку. 2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння, побудова загального розв'язку.
14	<u>Практика №14</u> 1. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. 2. Інтегрування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих.
Тема 5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь	
14	3. Інтегрування систем диференціальних рівнянь.
15	<u>Практика №15</u> Модульна контрольна робота - 2. Звичайні диференціальні рівняння. <u>Структура роботи.</u> 1. Теоретичне питання. 2. Приклад на розв'язання диференціального рівняння першого порядку. 3. Приклад на розв'язання диференціального рівняння вищого порядку, що допускає зниження порядку. 4. Задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. 5. Система диференціальних рівнянь.

5.2. Технічне забезпечення: Googleclass, Zoom, GoogleMeet, Idroo, Microsoft Whiteboard, Microsoft Office Word, будь яке програмне забезпечення для виконання графічного матеріалу (за бажанням студента).

6. Самостійна робота студента

6.1. Самостійна робота:

№ з/п	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання
Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної	
Тема 3.1. Невизначений інтеграл	
1.	Доведення властивостей невизначеного інтеграла.
2.	Розклад правильного раціонального дробу в суму найпростіших та їх інтегрування.
Тема 3.2. Визначений інтеграл	
3.	Доведення властивостей визначеного інтеграла.
4.	Виведення формули Ньютона - Лейбніца. Інтегрування частинами.
5.	Статичні моменти та координати центру мас матеріальної дуги та матеріальної плоскої фігури. Теореми Паппа - Гульдіна. Моменти інерції. Методи чисельного інтегрування. Формули прямокутників, трапецій та парабол.
Тема 3.3. Невласні інтеграли; інтеграли, залежні від параметрів	
6.	Інтеграли, залежні від параметрів. Неперервність. Диференціювання та інтегрування за параметром. Невласні інтеграли, які залежать від параметрів. Гама- та бета-функції.
Розділ 4. Функції кількох змінних	

Тема 4.1. Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних	
7.	Функція двох змінних, її область визначення. Геометричне тлумачення функції двох змінних.
8.	Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції двох змінних.. Екстремуми функції двох змінних, необхідні та достатні умови. Найбільше та найменше значення неперервної функції на обмеженій замкненій області. Умовний екстремум. Метод функції Лагранжа
9.	<i>Застосування диференціального числення ФБЗ. Знаходження локального екстремума функції. Найбільше та найменше значення функції в заданій області.</i>
Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння	
Тема 5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку	
10.	Поле напрямків. Ізокліни. Метод послідовних наближень (метод Ейлера). Рівняння, які зводяться до однорідних.
Тема 5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків	
11.	Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами якщо відомий його нетривіальний розв'язок.
12.	Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
Тема 5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь	
13.	<i>Лінійні системи диференціальних рівнянь. Системи лінійних однорідних ДР з постійними коефіцієнтами.</i> Лінійні однорідні системи. Загальний розв'язок. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами і їх розв'язок у випадку простих коренів характеристичного рівняння
Тема 5.4. Елементи теорії стійкості	
14.	Поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь. Визначення стійкості та асимптотичної стійкості за Ляпуновим. Функції Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість. Стійкість нульового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

6.2.Індивідуальні завдання

Для якісного вивчення курсу вищої математики студенти повинні виконати розрахункову роботу (РР).

РР-2 (частина 1) „Невизначений інтеграл”.

Завданням роботи є перевірити, як студенти засвоїли тему “Невизначений інтеграл” і визначити рівень їх навчальних досягнень. Проконтролювати вміння знаходити первісну, знання методів обчислення невизначених інтегралів та вміння застосовувати їх до різних класів функцій.

РР-2(частина 1) по темі:„Невизначений інтеграл” (Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина 1. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003., ТР-4, стор. 85) , № 1,2,3.

РР-2(частина 2) "Визначений інтеграл"

Метою роботи є перевірити знання студентами методів обчислення визначених інтегралів, умінь обчислювати визначені інтеграли для різних типів функцій та умінь застосовувати їх при розв'язанні фізичних і геометричних задач.

РР-2 (частина 2) по темі: „Визначений інтеграл” (Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина 1. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003., ТР-4, стор. 107) №6, 7, 8, 9.

Метою роботи є перевірити знання студентами методів обчислення визначених інтегралів, уміння обчислювати визначені інтеграли для різних типів функцій та уміння застосовувати їх при розв’язанні фізичних і геометричних задач.

РР-2 (частина 3)“ Диференціальне числення функції багатьох змінних ”

РР-2(частина 3) по темі: „ Диференціальне числення функції багатьох змінних ” (Збірник завдань з вищої математики. (типові розрахунки). Частина 1. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003., ТР-5, стор. 133) №4,5, 6, 8, 9.

6.3. Контрольна робота

МКР-2 „Звичайні диференціальні рівняння”

Проконтролювати рівень досягнень студентів з теми “Звичайні диференціальні рівняння” та вміння розв’язувати різні типи звичайних диференціальних рівнянь 1-го та 2-го порядку, а також складати відповідні диференціальні рівняння для задач геометричного і фізичного змісту.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Заняття проводяться онлайн згідно розкладу. Відвідування занять не є обов’язковим, проте студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки робота протягом семестру в групі з викладачем є більш якісною, крім того студент може отримати відповідь у викладача на проблемні запитання під час заняття та розвинути потрібні уміння й навички, що передбачені в глобальному розумінні вивчення курсу «Математичний аналіз. Частина 2. Інтегральне числення», та є основною метою навчання в цілому. Якщо студент не відвідує заняття, але завдання виконує, викладач може провести усну співбесіду, щоб уникнути порушення академічної доброчесності, згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3). Співпраця студентів у розв’язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час екзамену категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності, згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Для покращення зв’язу студента та викладача всі лекційні матеріали (PDF – файли та відео-запис лекцій), розміщуються в GoogleClass.

8. Види контролю навчання студентів

Поточний контроль: експрес-опитування, опитування за темою заняття (усній або тестовий формі), самостійні роботи, розрахункова робота, модульна контрольна робота.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр, як моніторинг поточного стану виконання студентом завдань з лекційної та практичної частин курсу на час атестації. Якщо по кожному з видів завдань виконано 50% від максимально можливого на час атестації, студент вважається атестованим. В іншому випадку в атестаційній відомості виставляється «не атестовано».

Семестровий контроль: екзамен.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус) складено:

- *Єршоміна Тетяна Олександрівна*, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук;
- *Поварова Олена Андріївна*, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук,
- *Степахно Ірина Василівна*, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук.

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 10 від 24.06.2026).

Погоджено Методичною комісією ІАТЕ (протокол № 9 від 26.06.2026.).

Додаток А

**Теоретичні запитання, що виносяться на модульну контрольну роботу
на тему" Звичайні диференціальні рівняння"**

- 1) Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, означення , знаходження загального розв'язку.
- 2) Диференціальні рівняння 1-го порядку однорідні відносно змінних, означення, знаходження загального розв'язку.
- 3) Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Бернуллі.
- 4) Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Лагранжа.
- 5) Рівняння Бернуллі, означення, знаходження загального розв'язку
- 6) Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
- 7) Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
- 8) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні різні).
- 9) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні рівні).
- 10) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння комплексно спряжені).
- 11) Загальні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння.
- 12) Формула Остроградського—Ліувілля.
- 13) Метод варіації довільних сталих для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку.

Рекомендована схема варіанту МКР на тему " Звичайні диференціальні рівняння"

(кількість завдань може відрізнятись)

МКР-2	Варіант 1.	МКР-2	Варіант 2.
1.	Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Бернуллі.	1.	Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Лагранжа.
2.	Знайти загальний розв'язок рівняння: $\frac{yy'}{x} + e^y = 0.$	2.	Знайти загальний розв'язок рівняння: $x + xy + yy'(1+x) = 0.$
3.	Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' = \ln x.$	3.	Знайти загальний розв'язок рівняння: $xy'' - y' = x^2 e^x.$
4.	Знайти частинний розв'язок рівняння: $y'' + 2y' + 5y = 22 \cos x + 4 \sin x,$ який задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 0.$	4.	Знайти частинний розв'язок рівняння: $y'' + 4y = 8e^{-2x},$ який задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 2.$
5.	Розв'язати систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = x + y. \end{cases}$	5.	Розв'язати систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} x' = 2y + x, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

Додаток Б

Перелік теоретичних запитань, що виносяться на екзамен

Невизначений інтеграл

- 1) Невизначений інтеграл: означення і основні властивості.
- 2) Інтегрування за частинами у невизначеному інтегралі.
- 3) Заміна змінної в невизначеному інтегралі.
- 4) Інтегрування простих алгебраїчних дробів перших трьох типів.
- 5) Інтегрування простого алгебраїчного дробу четвертого типу. Вивід рекурентної формули.
- 6) Інтегрування функцій, раціональних відносно синуса і косинуса, за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
- 7) Інтегрування функцій, раціональних відносно синуса та косинуса і непарних відносно синуса (косинуса).
- 8) Інтегрування функцій, раціональних відносно синуса та косинуса і парних відносно них.
- 9) Інтегрування функцій, раціональних відносно x і $\sqrt{a^2 + x^2}$, за допомогою тригонометричної підстановки.
- 10) Інтегрування функцій, раціональних відносно x і $\sqrt{a^2 - x^2}$, за допомогою тригонометричної підстановки.
- 11) Інтегрування функцій, раціональних відносно x і $\sqrt{x^2 - a^2}$, за допомогою тригонометричної підстановки.
- 12) Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен під знаком кореня.
- 13) Інтегрування функцій, раціональних відносно аргументу і кореня з дробово-лінійної функції.
- 14) Інтегрування біноміальних диференціалів (перший і другий випадок). Теорема П.Л. Чебишева.
- 15) Інтегрування біноміальних диференціалів (третій випадок). Теорема П.Л. Чебишева.

Визначений інтеграл

- 1) Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.
- 2) Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, теорема існування.
- 3) Основні властивості визначеного інтеграла.

- 4) Інтеграл із змінною верхньою межею. Теорема Барроу.
- 5) Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона-Лейбніца).
- 6) Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Рекурентна формула.
- 7) Заміна змінної у визначеному інтегралі.
- 8) Обчислення площ плоских фігур в декартових координатах.
- 9) Обчислення площі криволінійного сектора.
- 10) Обчислення довжин дуг кривих.
- 11) Обчислення об'ємів тіл.
- 12) Обчислення площ поверхонь обертання.

Диференціальне числення функції багатьох змінних

- 1) Поняття функції декількох змінних. Область визначення функції.
- 2) Частинні похідні першого порядку.
- 3) Диференціювання функції декількох змінних. Необхідна умова диференціювання. Достатні умови диференціювання функції декількох змінних.
- 4) Повний приріст і повний диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень.
- 5) Частинні похідні вищих порядків. Мішані похідні. Теорема про мішані похідні.
- 6) Диференціювання складних функцій. Повна похідна. Неявні функції і їх диференціювання.
- 7) Екстремум функцій декількох змінних. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови екстремуму функції.
- 8) Рівняння дотичної площини та нормалі.

Звичайні диференціальні рівняння

- 1) Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, означення, знаходження загального розв'язку.
- 2) Диференціальні рівняння 1-го порядку однорідні відносно змінних, означення, знаходження загального розв'язку.
- 3) Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Бернуллі.
- 4) Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Лагранжа.
- 5) Рівняння Бернуллі, означення, знаходження загального розв'язку
- 6) Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
- 7) Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
- 8) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні різні).
- 9) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні рівні).
- 10) Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння комплексно спряжені).
- 11) Загальні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння.
- 12) Формула Остроградського—Ліувілля.
- 13) Метод варіації довільних сталих для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку.

Додаток В

Схема завдання РР/РГР

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані параметричними рівняннями, рівнянням в явному вигляді та полярній системі координат.

2. Обчислити довжини дуги кривих, що задані параметричними рівняннями, рівнянням в явному вигляді та полярній системі координат.
3. Обчислити об'єми тіл, обмежених відомими поверхнями (частина параболоїда, конуса, кулі, циліндра...)
4. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій(зробити рисунок) навколо координатних осей.
5. Дослідити на збіжність невластні інтеграли 1-го та 2-го роду.

Додаток Г

Рейтингова система оцінки успішності студентів

Рейтинг студента з навчальної дисципліни розраховується зі 100 балів.

Семестровий рейтинг (50 балів) та екзаменаційний рейтинг (50 балів).

Лектор на першому та останньому занятті повідомляє студентів про план роботи в семестрі. Відео-пояснення плану роботи, розміщуються в GoogleClass.

1. **Семестровий рейтинг** (протягом семестру) складається з балів, що студент отримує на **практичних заняттях, розподілення балів відбувається за баченням викладача з практики.**

Рекомендовані види робіт для оцінювання балами:

- *робота під час заняття* (відповіді на заняттях, самостійні роботи, тести в Moodle або GoogleClass) для перевірки вміння студента застосувати теоретичні знання до розв'язування прикладних задач;
- *виконання модульної контрольної роботи*, яка може бути поділена на частини за основним розділами курсу (на думку викладача). Бали між частинами модульної контрольної роботи розподіляються в залежності від кількості та складності завдань (на думку викладача).
- *виконання та захист розрахункової роботи*, яка може бути поділена на частини за основним розділами курсу (на думку викладача).

Студент повинен здати розрахункову роботу не пізніше ніж за тиждень до екзамену, щоб викладач зміг перевірити цю роботу і студент мав змогу її захистити. Якщо студент не виконує цю вимогу, то він до екзамену не допущений (оскільки не виконується одна з умов допуску до екзамену).

Загальна система оцінювання виконаних студентом завдань:

- «відмінно» – повна відповідь (не менше 95% потрібної інформації);
- «добре» – достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями;
- «задовільно» – неповна відповідь (не менше 60% потрібної інформації) та незначні помилки;
- «незадовільно» – немає правильної ідеї розв'язання задачі або задача не розв'язана зовсім.

2. **Екзамен.** Екзаменаційний рейтинг – 50 балів.

Умови допуску до екзамену: 60% оцінки за МКР, зарахована розрахункова робота, семестровий рейтинг не менше 30 балів, зараховні (виконані на 60%) всі роботи семестру.

Якщо студент отримав допуск до екзамену та протягом семестру виконав вчасно та на $\geq 60\%$ завдання лекційного курсу: *конспект лекцій* (основні означення, теореми, властивості (без доведення)), *самостійні роботи*, то йому пропонується оцінка.

Якщо студент не погоджується із запропонованою оцінкою, або оцінка не виходить 60 балів, то він пише екзаменаційну роботу.

Екзаменаційна робота складається з 2 теоретичних запитань та 3 практичних завдань. Всі завдання оцінюються по 10 балів. *Екзамен відбувається усно в режимі відеозв'язку згідно з розкладом.* Для більш об'єктивної оцінки рівня підготовки студента екзаменаторові надається право задавати додаткові питання в межах навчальної програми.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено